Boncompagni

Trattati di aritmetica

Roma 1857

I.

ALGORITMI DE NUMERO INDORUM.

(Biblioteca dell'Università di Cambridge, Codice manoscritto contrassegnato « *Ii*. 6. 5 » carte 102, *recto* — 109, *verso*).

DIXIT algoritmi: laudes deo rectori nostro atque defensori dicamus dignas, que et debitum ei reddant, et augendo multiplicent laudem, deprecemurque eum ut nos dirigat in semita rectitudinis et ducat in uiam ueritatis, et ut auxilietur nobis super bona uoluntate in his que decreuimus exponere ac patefacere de numero indorum per .IX. literas, quibus exposuerunt uniuersum numerum suum causa leuitatis atque abreuiationis, ut hoc opus scilicet redderetur leuius querenti arithmeticam, idest numerum tam maximum quam exiguum, et quicquid in eo est ex multiplicatione et diuisione, collectione quoque ac dispersione et cetera. car. 102 *recto*.

Dixit algoritmi: Cum uidissem yndos constituisse .IX. literas in uniuerso numero suo, propter dispositionem suam quam posuerunt, uolui patefacere de opere quod fit per eas aliquid quod esset leuius discentibus, si deus uoluerit. Si autem indi hoc uoluerunt, et intentio eorum in his .IX. literis fuit causa que mihi patuit, deus direxit me ad hoc. Si uero alia de causa, preter eam quam ego exposui, hoc fecerunt per hoc quod ego exposui, eadem causa certissime et absque ulla dubitatione potuerit inueniri. Leuiterque patebit aspicientibus et discentibus.

Fecerunt igitur .IX. literas, quarum figure sunt he .... (1). est quoque diuersitas inter homines in figuris earum: fit autem hec diuersitas in figura quinte litere et sexte, septime quoque

(1) La lacuna indicata con quattro punti nella linea 25 della presente pagina trovasi anche nel sopraccitato Codice *Ii*. 6. 5 della Biblioteca dell' Università di Cambridge (carta 102 *recto*, lin. 18).

et octaue. Set in hoc nullum impedimentum est. Sunt enim note signantes numerum, et he sunt figure in quibus est illa diuersitas .... (1). Et iam patefeci in libro algebre et almucabalah, idest restaurationis et oppositionis, quod uniuersus numerus sit compositus, et quod uniuersus numerus componatur super unum. Vnum ergo inuenitur in uniuerso numero ; et hoc est quod in alio libro arithmetice dicitur. Quia unum est radix uniuersi numeri, et est extra numerum. Radix numeri est, quare per eum inuenitur omnis numerus. Extra numerum uero est, quare inuenitur per se, idest absque alio aliquo numero. Reliquus autem numerus sine uno inueniri non potest. Cum enim unum dicis, inuentione sui non indiget alio numero. Reliquus autem numerus indiget indiget (*sic*) uno : quare non potes dicere duo uel tria, nisi precedat unum. Nichil aliud est ergo numerus, nisi unitatum collectio; et hoc quod diximus non potes dicere duo uel tria, nisi precedat unum: car. 102 *verso*. non de uoce diximus, ut ita dicam, set de re. Non enim | possunt esse duo uel tria, si unum auferatur. Vnum uero potest esse absque secundo uel tercio. Igitur nichil aliud sunt duo, nisi unius duplicitas uel geminatio: et similiter tria nichil aliud sunt, nisi eiusdem unitatis triplicatio: sic de reliquo numero intellige. Set nunc redeamus ad librum.

Inueni, inquid algorizmi, omne quod potest dici ex numero, et esse quicquid excedit unum usque in .IX., idest quod est inter .IX. et unum, idest duplicatur unum et fiunt duo; et triplicatur idem unum, fiuntque tria, et sic in ceteris usque in .IX. De inde ponuntur .X. in loco unius, et duplicantur .X. ac triplicantur, quemadmodum factum est de uno, fiuntque ex eorum duplicatione .XX., ex triplicatione .XXX., et ita usque ad .XC. Post hec redeunt .C. in loco unius , et

(1) La lacuna indicata con quattro punti nella linea terza della presente pagina trovasi anche nel sopraccitato Codice *Ii*. 6. 5. (carta 102 *recto*, lin. 22).

duplicantur ibi atque triplicantur, quemadmodum factum est de uno et .x.; efficiunturque ex eis .cc. et .ccc. et cetera usque in .dcccc. Rursum ponuntur mille in loco unius ; et duplicando et triplicando, ut diximus, fiunt ex eis .ii. milia, et .iii. et cetera usque in infinitum numerum, secundum hunc modum. Et inueni quod operati sunt yndi ex his differentiis. Quarum prima est differentia unitatum, in qua duplicatur et triplicatur quicquid est inter unum et .ix. Secunda differentia decenorum, in qua duplicatur uel triplicatur quicquid est a .x. in nonaginta. Tercia differentia centenorum, in qua duplicatur uel triplicatur quicquid est a .c. in .dcccc. Quarta uero est differentia milium, in qua duplicatur ac triplicatur quicquid est a mille in .ix. m. Quinta differentia est .x̄. hoc modo: quocienscumque ascenderit numerus, adduntur differentie: erit dispositio numeri ita: Omne unum quod fuerit in superiora (*sic*) differentia, erit in inferiori que est ante ipsam .x.; et quod fuerit .x. inferiori, erit unum in superiori que precedit eam; et erit inicium differentiarum in dextera scriptoris: et hec erit prima earum, et ipsa posita est unitatibus. Cum autem ponerentur .x. in loco unius, et fierent in secunda differentia, essetque figura eorum figura unius, necesse fuit eis figura decenorum, eo quod similis esset figure unius, ut scirent per eam quod essent .x. Proposuerunt igitur ei unam differentiam, et posuerunt in ea circulum paruulum in similitudine .o. litere, ut per hoc scirent quod differentia unitatum esset uacua, et nichil numeri esset in ea preter circulum paruulum, quem diximus occupare eam: et ostenditur quod numerus, qui est in sequenti differentia, esset decenis, et quod hec esset differentia secunda que est differentia decenorum. Et posuerunt post circulum in predicta differentia secunda quicquid noluerunt ex numero decenorum de hoc quod est inter .x. et .xc., et he sunt figure decenorum: figura .x. est

car. 103 *recto.* hec .... Figura .xx .... (1). Et similiter figura .xxx. est ita, | et ita usque ad .ix. : erit scilicet circulus in prima differentia, et caracter pertinens ad ipsum numerum in secunda differentia. Hoc autem sciendum est, quod caracter qui sic in prima differentia, unum; in secunda sic .x.; in tercia .c., atque in quarta .ī. Et similiter qui sic in prima differentia duo; in secunda sic .xx., et in tercia .cc., et in quarta .iī. et sic de ceteris intellige. Nos autem redeamus ad librum.

Post differentiam decenorum sequitur sequitur (*sic*) differentia centenorum, in qua duplicatur ac triplicatur quicquid est a .c. in .dcccc.; et eius figura est sicut figura unius in tercia differentia posita ita .100.; et figura ducentorum est sicut figura duorum posita similiter in tercia differentia ita .300.: figura quoque tercentorum est figura trium posita in tercia differentia ita .300, et sic usque ad nongenta. Hac quoque sequitur differentia milium, in qua similiter duplicatur et triplicatur quicquid est a mille in .ix̄. Cuius figura est sicut figura unius in quarta differentia posita ita .1000: figura duorum milium est sicut figura duorum in quarta differentia posita ita. 2000. et ita usque ad ix. milia: ponuntur autem in differentia quarta ante caracterem tres circuli, ut ostendatur, quod sit in quarta differentia, sicut positus est in secunda differentia unius, et in tercia duo, ut ostenderetur quod essent differentie decenorum uel centenorum: et hoc fit cum non fuerit ante ipsum numerum alius numerus in eadem differentia. Si autem fuerit cum numero, qui ponitur in his differentiis, aliquis numerus infra eum, debet poni in ea differentia que sibi debetur. Verbi gratia: si fuerit cum .x. aliquis numerus de his qui sunt infra eum, utpote .xi, uel xii., ponuntur ita .ii. : in prima scilicet differentia, ubi positus erat circulus, ponatur unus, et

(1) Le due lacune, ciascuna delle quali è indicata con quattro punti nella prima linea della presente pagina, trovansi anche nel sopraccitato Codice *Ii*. 6. 5. (carta 102 *verso*, lin. 33).

in secunda differentia ponatur etiam unum quod sic .x. Similiter si fuerit cum .c. alius numerus de his qui sunt infra eum, ponatur in differentia que sibi debetur. Quod ostendamus sub quodam exemplari, et dicamus quod esset numerus .ccc. xxv. Quem cum uellemus ponere in suis differentiis, posuimus ita. Incepimus a dextera scriptoris, et posuimus in prima differentia .v.; in secunda, eundo uersus sinistram partem scriptoris, .xx., et in tercia differentia .ccc., unumquemque numerum in differentia sua, idest unitates in differentia unitatum, que est prima; et decenos in differentia decenorum, que est secunda. Centenos uero in differentia centenorum, que est tercia; et hec est figura .335.: et similiter erit in aliis differentiis secundum hunc ordinem, idest quocienscumque augmentatus fuerit numerus et creuerint differentie, ponatur unumquodque genus numeri in sua differentia que debetur ei. Cum autem collecti fuerint in aliqua differentiarum .x. uel plus, erigantur ad superiorem differentiam, et fiat de unoquoque .x. in superiori differentia unum. Rursum si fuerit in eadem differentia, ad quam peruenerit numerus ascendendo, alter numerus addatur desuper, et colligantur insimul: et si fuerint in eo .x. uel plus, fiat de unoquoque .x. unum, et erigatur ad superiorem differentiam, idest si collecti fuerint in prima differentia decem,|fiat de eis unum, et ponatur in secunda diffe- car. 103 *verso.*
rentia: et si in eadem differentia similiter fuerit numerus, iungatur ei: et si fuerint ibi .x., fiat de eis unum, et erigatur etiam ad terciam differentiam. Verbi gratia. Si in prima differentia, que est differentia unitatum, habueris .x., fac de eis unum, et pone ipsum in secunda differentia. In prima uero differentia pone circulum sicut diximus, ut ostendatur due esse differentie. Si uero fuerint .xi., fac de .x. unum, et pone eum in secunda differentia ut supra, et dimitte unum in prima. Si autem inueneris in secunda differentia, ubi posuistis ipsum numerum quem fecisti de .x., aliquem numerum, iunge eum cum illo. Et

si fuerint .x. uel plus, fac de .x. unum, et iterum pone eum in differentia tercia ; et quod remanserit infra .x. maneat in suo loco. Quod autem dicimus plus .x., hoc pertinet ad multum numerum. Verbi gratia. Si fuerit in secunda uel tercia differentia magnus numerus, utpote si inueneris in differentia tercia,que est differentia centenorum, .ix.; et si fuerint in differentia secunda .x., facies de .x. unum, et mutabis eum ad terciam differentiam, ubi iunges eum cum .ix. , et fiunt .x.: facies unum de ipsis .x.,et mutabis eum in quarta differentia, et ibi erit mille. Si uero inuenisses in secunda differentia .xx., et facies de eis duo, addensque duo super .ix. in tercia differentia, et fierent .xi.: faceres iterum de .x. unum, et mutares eum ad quartam differentiam,ubi esset mille, et remanet unum in tercia differentia: et ideo dicit .x. uel plus. Et hoc sciendum, quare cum mutaueris numerum, et posueris eum in sequenti differentia, debes ponere per caracteres suos, idest si fuerint .x. , pones pro eis caracterem qui significat in prima differentia unum; et si fuerint .xx., pones pro eis caracterem qui significat in prima differentia duo, et sic de ceteris intellige. Si uero remanserit in eadem differentia,de qua mutasti numerum, aliquid ex numero, dimitte eum similiter per caracteres suos, idest si remanserit unum uel duo, dimittes eum ibi per caracterem qui significat eundem numerum, idest si remanserit unum, describes ibi caracterem unius; et si remanserint duo, describes ibi caracterem duorum et cetera. Set significabit unaqueque figura secundum quod fuerit differentia, idest in prima differentia significabit unitates ; in secunda deceno (*sic*); in tercia centenos et cetera, sicut supra dictum est.

Si autem fuerit numerus multus, et uolueris scire quotus sit, uel quot differentie sint in ipso, ut scribas eum in libro, uel loquaris de eo, scito quod non sit in aliqua differentia plus .ix., nec minus uno, nisi circulus sit qui nichil est. Cum ergo uolueris hoc scire, numera differentias, incipiens a prima que

erit in dextera parte, et hec erit differentia unitatum. Relique uero differentie erunt descripte per successiones suas uersus sinistram partem scriptoris. Ex quibus secunda erit differentia decenorum, et tercia centenorum, et quarta milium, et quinta .x. milium. Sexta uero differentia erit .c. milium, et septima mille milium. Rursum VIII.[ua] erit .x. milia milium,| et nona .c. milia milium, et decima mille mille milium tribus uicibus, et undecima .x. millia milia milium tribus uicibus, et duodecima .c. millia milia milium tribus uicibus, et $\overline{\text{XIII}}$. mille mille mille milium quatuor uicibus; et similiter in omni differentia ex differentiis numeri addes in locutione tua. Quia super tres differentias, idest decenorum et centenorum, et milium residuum fuerit unum, erunt .x. milia ipsorum milium que exierunt tibi in dictis. Si uero remanserint duo, erunt .c. milia ex ipsis milibus: et iam constitui tibi exemplar, quo poteris scire ac probare per eum quicquid augmentatur super numerum, uel minuitur ex eo; et hec est figura eiusdem . . . . (1). car. 104 *recto.*

Due litere cum collegeris eas secundum quod diximus de his notis, erit numerus milium earum notarum mille mille mille millium quinque uicibus secundum numerum caracterum qui sunt sub eis; uel centum millia milia milia milium quatuor uicibus, secundum numerum caracterum qui sunt sub eis; uel octoginta milia milia milia milium quatuor uicibus, secundum quod est ex eis caracteribus. Deinde septingenta milia milia milium milium tribus uicibus, secundum caracteres qui sunt sub eis; et tria milia milia milium tribus uicibus; uel quinquaginta unum milia milium duabus uicibus; uel quadringenta milia et nonaginta duo milia et octingenta sexaginta tres.

Cum uolueris addere numerum super numerum, uel mi-

---

(1) La lacuna indicata con quattro punti nella linea 17 della presente pagina trovasi anche nel sopraccitato Codice *Ii*. 6. 5. (carta 104 *recto*, lin. 8, 9).

nuere numerum de numero, pone utrosque numeros in duobus ordinibus, unum scilicet ex eis sub altero, et sit differentia unitatum sub differentia unitatum, et differentia decenorum sub differentia decenorum. Quod si uolueris colligere utrosque numeros, addes scilicet unum super alterum : addes unamquamque differentiam super differentiam que est super eam de genere suo, idest unitates super unitates, et decenos super decenos. Cum collecti fuerint in aliqua differentiarum, idest in differentia unitatum uel decenorum, siue in alia aliqua decem, pones pro eis unum, et eriges eum ad superiorem differentiam, idest si habueris in prima differentia, que est differentia unitatum, decem, facies de eis unum, et sub leuabis eum ad differentiam decenorum, et ibi significabit decem. Si autem remanserit aliquid de numero quod sit infra x; uel fuerit ipse numerus infra .x., dimictens eum in eadem differentia; et si nichil remanserit, pones circulum, ut non sit differentia uacua: set
car. 104 verso. sit in ea circulus qui occupet ea, ne forte cum | uacua fuerit, minuantur differentie, et putetur secunda esse prima; et sic decipieris in numero tuo. Sic quoque facies in omnibus differentiis. Similiter cum collecti fuerint in secunda differentia .x., facies de eis unum; et subleuabis eum ad differentiam terciam; ibique significabit centum ; et quicquid remanserit infra .x., remanebit ibi. Si uero nichil in ceteris remanserit, pones ibi circulum ut supra. Sic facies in ceteris differentiis, si plus fuerit. Si uero uolueris minuere unum de alio, numerum scilicet de numero, minues unam quamque differentiam de alia differentia que est super se ex genere suo, sicut supra dictum est. Quod si non fuerit in superiori differentia tantus numerus, de quo possis minuere numerum inferioris differentie, idest si fuerit minus, uel nichil ibi fuerit, accipies de secunda differentia que est alcior illo superiori unum, et de eo facies decem; minuesque de eo quod debueris, et quod remanserit dimittes in eadem superiori differentia. Si

uero nichil remanserit, pones ibi circulum ut supra. Si autem in secunda differentia a superiori nichil fuerit, accipe unum de tercia differentia, et erunt .x. in secunda. Et rursum ex illis .x. accipias unum, et fac de eo ut supra, et remanebunt in secunda .ix.; et incipe semper in augmentacione uel diminutione ab altiori differentia: postea a sequenti que eam succedit, quia utilius ac leuius erit opus, si Deus uoluerit. Quod ut facilius intelligatur, necesse est ut hoc sub exemplo notemus, et hoc dicamus tribus modis, ne quis in eo aliquo modo turbetur. Constituamus ergo aliquem numerum, et dicamus, uerbi gratia. Ponamus sex milia quadrigentos uiginti duo per differentias suas, et dicamus quod uolumus minuere de eis tria milia ducentos undecim : ponamus itaque in prima differentia que est in dextera, scilicet duo, et in secunda .xx. In tercia quoque quadringentos, et in quarta sex milia : et ponamus etiam ipsum numerum quem uolumus minuere de eo sub ipso per consimiles differentias ita. Ponamus scilicet unum sub duobus in prima differentia, et .x. sub .xx. in secunda; ducentos quoque sub quadringentis in tercia, et tria milia sub VI. milibus in quarta; et hec est eorum figura.

Cumque uellemus minuere unum numerum de alio, minorem scilicet de maiori, cepimus a superiori differentia, idest a quarta. Minuimus itaque III. de VI., et remanserunt tria in quarta differentia. Minuimus quoque duo de IIII^{or}, et remanserunt in tercia differentia duo. Minuimus etiam unum de II.^{obus}, et remansit unum in secunda differentia: et similiter remansit in prima differentia unum, cum minuerimus de duobus, que erant super eum, unum; et hec | remanencium figura est . . . . (1). Rursum ponamus alium numerum alio modo ad placitum, de quo nichil remaneat in differentiis suis. Sitque car. 105 *recto*.

(1) La lacuna indicata con quattro punti nella linea 29 della presente pagina trovasi anche nel sopraccitato Codice *Ii*. 6. 5. (carta 105 *recto*, linea prima).

numerus noster mille centum quadraginta quatuor, de quibus minuamus .c.xliiii., et constituamus unum quemque ex eis sub alio hoc modo.

Cum uolueris mediare aliquem numerum, accipe a prima differentia, et media eam: in qua si fuerit numerus inpar, media pares, et remanebit unum, quod mediabis, idest diuides in duas medietates; constituesque medietatem unam triginta partem ex sexaginta, que faciunt unum; et pone sub eadem differentia .xxx.: deinde mediabis sequentem differentiam, si fuerit numerus eius par; et si fuerit impar, accipe medietatem paris, et pone eam in loco eius, et constitue medietatem unius residui quinque; et pone eos in differentia que est ante ipsam. Si autem non fuerit in eadem differentia quam uolueris mediare, nisi tantum unum, pone in loco eius circulum, et pone quinque in differentia que est ante ipsam. Et similiter operare in uniuersis differentiis. Et cum uolueris duplare, incipe a superiori differentia, et dupla; et cum numerus crescendo excesserit .x., fac de decem unum, et pone eum in sequenti differentia, et inuenies, si Deus uoluerit.

Etiam patefeci in libro, quod necesse est omni numero qui multiplicatur in aliquo quolibet numero, ut duplicetur unus ex eis secundum unitates alterius. Cumque uolueris multiplicare aliquem numerum in alio per literas indorum, necesse est retinere multiplicationem numeri, qui est inter unum et .ix. in inuicem, siue concors fuerit numerus, siue diuersus. Cumque uolueris multiplicare numerum in altero, pone unum ex eis secundum quantitatem mansionum eius in tabula, uel in qualibet re alia quam uolueris. De inde pone primam differentiam alterius numeri sub altiori differentia primi. Eritque prima mansio eiusdem numeri sub ultima mansione primi numeri quem posuisti. Et erit mansio secunda precedens primum numerum uersus sinistram: cuius rei exemplar est. Quod cum uellemus multiplicare duo milia tercentos .xxvi. in .ccx.iiii^{or},

posuimus duo milia tercentos .xxvi. per indas literas in iiii.or differentiis; fueruntque in prima differentia, que est in dextera, .vi.; et in secunda duo, qui sunt .xx.; et in tercia tres, qui sunt tercenti; et in quarta duo, qui sunt duo milia. Post hec posuimus sub duobus milibus iiiior; de inde in precedenti uersus sinistram unum, qui sunt .x.; postea in tercia duo, qui sunt ducenti: et hec est figura eorum.

| Post hec incipias ab ultima differentia superiori; et multiplica eam in ultima differentia inferioris numeri, qui est sub eo, uel quod exierit de multiplicatione, scribes de super. Postea scribes etiam in differentia que succeditur, redeundo uersus dexteram inferioris numeri. Deinde facies similiter, donec multiplices ultimam differentiam superioris numeri in uniuersis differentiis inferioris numeri: et cum hec perfeceris, mutabis numerum inferiorem una differentia uersus dexteram. Eritque prima differentia inferioris numeri sub differentia que succedit numerum quem multiplicasti uersus dexteram. De inde pones reliquas differentias pur successiones eorum: post hec multiplicabis etiam ipsum numerum, sub quo posuisti primam differentiam inferioris numeri ultima mansione inferioris numeri: de inde in ea que succedit, donec perficias omnes, quemadmodum fecisti in prima differentia: uel quicquid collectum fuerit ex multiplicatione unius cuiusque differentie, scribes eum in differentia que est super ipsum : uel cum hec feceris, mutabis etiam eum numerum, scilicet tuum, una differentia ; et facies de eo quemadmodum fecisti in differentiis primis ; et non cessabis ita facere, donec perficias omnes differentias. Sic que multiplicabis uniuersum numerum superiorem in uniuerso numero inferiori. Cumque euenerit ut prima differentia inferioris numeri sit sub aliqua differentia, in qua nullus sit numerus, idest in qua fuerit circulus, faciamus eam transire ad succedentem differentiam , in qua fuerit numerus uersus dexteram. Quia omnis circu- car. 105 verso.

lus qui multiplicatur in aliquo numero, nichil est, idest nullus numerus surgit ex eo; et quicquid multiplicatur in circulo, similiter nichil. Cumque mutauerimus differentias uersus dexteram; postea multiplicauerimus ipsum numerum superiorem in una quaque differentia ex numero inferiori, addemus quod exierit nobis de multiplicatione super differentiam que est super illam differentiam, in qua multiplicauimus: dumque crescente numero collecti fuerint nobis in aliqua differentia .x., faciemus ex eis unum: ponemusque eum in sequenti differentia uersus sinistram; et si aliquid remanserit, notabimus eum in loco suo: si uero nichil remanserit, ponemus in loco eius circulum, ne minuatur aliquid ex differentiis: et cum perduxerit multiplicatio ad primam differentiam numeri inferioris, debebimus quicquid fuerit in differentia, que est super eam; et notabimus id quod exierit nobis ex multiplicatione in loco eius. Sicque faciemus, donec multiplicemus uniuersas differentias superioris numeri in uniuersis differentiis inferioris; et sic multiplica-
car. 106 *recto.* bimus | numerum ex eis secundum numerum unitatum alterius, et perficietur multiplicatio: et hec est figura numeri, qui exiuit nobis de multiplicatione duorum milium et trecentorum uiginti sex in ducentis .xiiii., que sunt quadringenta milia et nonaginta septem milia et septingenta .lxiiii.

Cum uolueris scire utrum inuenisti uel errasti in duplatione tua uel multiplicatione, accipe numerum quem uolueris duplare, et diuide eum per .ix. et .ix., et quicquid remanserit minus .ix., duplica eum: in quo si fuerint .ix., proice eos, et quod remanserit serua. Post hoc duplica numerum tuum, idest ipsum numerum quem uolueris duplare, et diuide eum per .ix., et .ix.; et quod remanserit, si fuerit simile illi qui prius remanserat dum duplicaueras eum, iam inuenisti: sin autem, errasti. Et cum multiplicare uolueris aliquem numerum in aliquo; et uolueris probare ut supra, diuide numerum quem

duplicasti per .ix., et quod remanserit infra .ix., serua. Iterum diuide alium numerum per .ix., et quod remanserit infra .ix. serua. Deinde multiplica quod remanserit de primo in eo quod remanserit tibi de secundo; et proinde ex eo quod collectum fuerit .ix., si fuerit ibi; et si non fuerint ibi .ix., quod remanserit, erunt nota. Si autem fuerint ibi .ix., proice .ix. et serua quod remânserit; et quare hec erunt nota, intellige. Post hec multiplica unam multiplicationem in aliam; et diuide quod collectum fuit per .ix.; et quod remanserit, si fuerit simile illi quod dixi tibi de nota, scito quare inuenisti. Si uero non fuerit simile, errasti: intellige.

In diuisione autem pones numerum quem uolueris diuidere per differentias suas : postea pones ipsum numerum, super quem uis diuidere, sub eo. Sitque ultima differentia numeri super quem diuidis sub ultima differentia superioris numeri quem diuidis. Si autem fuerit numerus, qui est ultima differentia superioris numeri quem uis diuidere, minus illo qui est ultima differentia inferioris numeri super quem diuidis, retrahe ipsam differentiam uersus dexteram, donec sit numerus superioris differentie plus 1 : pone ultimam differentiam inferioris numeri, super quem diuidis, sub differentia secunda que succedit ultimam differentiam superioris numeri. Post hec aspice primam differentiam numeri super quem uis diuidere, et pone in directo eius super numerum superioriorem(*sic*)quem diuidis, uel sub eo in directo eius aliquem|numerum quem inde car. 106 *verso*.
multiplicaueris in ultima differentia inferioris numeri super quem diuidis, erit similis illius numeri qui fuerit in superiori differentia, uel prope eum qui sit minus illo. Cumque scieris eum, multiplica eum in ultima differentia inferioris numeri, et minue quod exierit tibi de multiplicatione de eo quod est supra eum ex inferiori numero qui diuiditur. Iterum multiplica eum in secunda differentia que succedit ultimam differentiam uersus dexteram; et minue eum de eo quod est super eum; et

fac in diminutione quem admodum fecimus in inicio libri. Cum uolueris minuere aliquem numerum de aliquo numero, et similiter fac, donec multiplices eum in uniuersis differentiis inferioris numeri super quem diuidis. Post hec muta uniuersas differentias inferioris numeri, super quem diuidis, una differentia uersus dexteram, et pone in directo prime differentie illius ad similitudinem illius quod prius posuisti. Quod cum multiplicaueris in ultima differentia inferioris numeri super quem diuidis, consument id quod supra eum est, uel quod fuerit prope eum: et multiplica illud quod posuisti in directo eius in ultima differentia numeri inferioris; et minue quod exierit tibi de multiplicatione de eo quod supra eum est; et sic facies in uniuersis differentiis : et si remanserit de differentiis numeri superioris quem diuidis aliquid quod debeat diuidi, semper muta differentias inferioris numeri una differentia, donec sit prima differentia eius in directo alicuius differentie superioris numeri : quod si fuerit in aliqua differentia, ex differentiis numeri quem diuidis, circulus, et peruenerit mutatio ad eum, non transeas eum, quem ad modum fecisti in multiplicatione. Set pones in directo eius aliquid quod multiplicabis quem ad modum narrauimus. Cumque perfeceris hec omnia, quicquid exierit tibi ex differentiis in directo numeri quem diuidis, illud debetur uni: et si aliquid remanserit, erit pars unius ex eo numero quem diuidis, et numquam remanebit nisi quod erit minus illo quod diuidis. Si autem plus remanserit, scito quod errasti.

Et scito quod diuisio sit similis multiplicationi; set hoc fit econuerso: quare in diuisione minuimus, et ibi addimus, idest in multiplicatione eius exemplar est. Quod cum uellemus diuidere quadraginta sex milia et quadrigentos sexaginta octo super tercentos .xxiiii., posuimus primum in dextera parte octo; postea posuimus sex uersus sinistram qui sunt sexaginta: de inde .iiii.^{or} qui sunt quadringenti; postea sex que sunt .vi.

milia ; postea .IIII.^{or} que sunt quadringinta milia. Eruntque ultima harum differentiarum uersus sinistram, et prima earum octo uersus | dexteram: post hec scribes sub eis numerum super quem diuidis; scribesque ultimam differentiam numeri, super quem diuidis, que est figura trium, et sunt tercenti sub ultima differentia numeri superioris, que sunt IIII.^{or}, eo quod sit minus illo quod est supra eum : et si esset plus illo, retrahemus eum una mansione, ponemusque eum sub sex : post hec ponemus in ea, que succedit tres, figuram duorum que sunt .XX. sub sex: postea ponemus in ea que succedit .IIII.^{or} idem .IIII.^{or}: et hec figura earum. car. 107 *recto.*

Post hec insipientes scribamus in directo prime differentie numeri super quem diuidimus super numerum superiorem quem diuidimus qui sunt quater unum: et si posuissemus eum sub .IIII.^{or}, esset conueniens. Multiplicemusque ipsum in tribus, et minuemus eum de eo quod supra ipsum est, et remanebit unum. De inde multiplicemus eum in duobus; minuemus eum de eo quod supra ipsum est, qui sunt .VI., et remanebunt .IIII.^{or} Post hec multiplicemus eum iterum in .IIII.^{or}, et minuemus eum de eo quod supra ipsum est, que sunt .IIII., et nichil remanebit : ponemusque in loco eius circulum. Postea mutabis inicium numeri super quem diuidis, uel .IIII.^{or} sub .VI., et erunt duo sub circulo, et III. sub .IIII. De inde scribes in directo inferioris numeri aliquid in ordine unius, idest .IIII., quos multiplicabis in tribus, et erunt XII.; minuesque eos de eo quod est super tres qui sunt XIIII., et remanebunt .II : post hec multiplicabis etiam ipsos .IIII.^{or} in duobus qui succedunt tres, et erunt VIII., quos minues de eo quod supra ipsum est qui sunt .XX., et remanebunt XII., duo scilicet supra II.º, et unum supra tres. Iterum multiplicabis .IIII., in .IIII. qui succedunt dexteram, et erunt XVI.; minuesque eos de eo quod supra ipsos est qui sunt .CXXVI. , et remanebunt supra .IIII. circulus , et supra duos unum , et

super tres unum. Iterum mutabis numerum super quem diuidis, idest IIII.^{or} sub VIII., erunt duo sub circulo et tres sub uno: postea scribes in directo IIII. super numerum superiorem quem diuidis in ordine .IIII., atque unius tres, quos multiplicabis in tribus, et erunt .IX.; minuesque eos de eo quod est supra tres, qui sunt XI., et remanebunt super tres duo. Multiplicabis quoque tres in duobus qui succedunt tres, et erunt VI., quo minues de eo quod est supra tres qui sunt .XX. , remanebunt .XIIII. Iterum multiplicabis predictos tres in .IIII.^{or} qui succedunt duos, et erunt XII. ; minuesque eos de eo quod super illos est, qui sunt CXXVIII., et remanebunt supra .IIII. sex, et supra duos tres, et supra tres unum. Exibitque nobis quod debetur uni ex eis; et hoc erit .CXLIII. , et CXXXVI. partes de .CCC.XXIIII. partibus unius: et hec figura eorum.

car. 107 *verso.* | Et si uolueris diuidere differentias plures super unam, ut pote mille .DCCC. per .IX., scribes mille octingentos, quorum figura est, ut ponas uersus dexteram duos circulos: postea .VIII.; deinde unum: post hec ponas .IX. sub .VIII., eo quod sint plus .VIII.: deinde scribes in directo eius super octo aliquid, quod cum multiplicaueris in .IX., consumet quod est super se , idest XVIII. qui sunt super .IX.; inueniesque illud esse duo, quos multiplicabis .IX. IX. et erunt .XVIII.; minuesque eos de eo quod est desuper, et nichil remanebit : de inde muta .IX. una differentia uersus dexteram, et fient sub circulo. Ponesque aliquid de super, quod cum multiplicaueris in .IX., nichil erit: quare est circulus super .IX., et nullus numerus est ibidem. Pones ergo circulum in directo .IX. in ordine duorum, et multiplicabis .IX. in circulo, eritque circulus, idest nichil. Post hec muta etiam .IX. ad differentiam que est ante eam, que est prima differentia; eruntque .IX. sub circulo: et fac de eis quem admodum fecisti de circulo qui erat eos (*sic*). Eruntque ibidem duo circuli, post quos erunt duo qui sunt

ducenti; et hoc est quod debetur uni, et non remanebit ex eo quod diuiditur quicquam: et quociensenmque diuiseris aliquem numerum super aliquem, et remanserint de eo quod diuiditur circuli, ante quos nullus sit numerus, accipe quod residuum fuit ex circulis ab inicio differentiarum diuisi numeri uersus dexteram, et addes eos super id quod exierit de diuisione; et quod fuerit, ipsum est quod debetur uni. Et hec est quedam abreuiacio propinqua. Ordo autem primus est ordo operis: cuius rei exemplar est, quod cum scriberemus mille .DCCC, fuerunt duo circuli et VIII., et in tercia differentia, atque unum in quarta: posuimus .IX. sub .VIII, eo quod sint plus illo, quod est in ultima differentia; fuitque figura eorum ita. Cumque scriberemus in directo .IX. supra .VIII. duo, multiplicaremusque ea in .IX., fuerintque .XVIII., quos cum minueremus de eo quod est supra .IX., et remanserunt duo circuli, nullum habentes ante se numerum. Scripsimus ergo duos circulos in ordine duorum, qui sunt supra .IX., et fuerunt .CC., quorum hec est figura.

Hec sunt uniuersa que necessaria sunt hominibus ex diuisione et multiplicatione in eo numero qui fuerit integer. Et nunc incipiemus tractare de multiplicatione fractionum, et earum diuisione, et de extractione radicum, si Deus uoluerit.

Scito quod fraciones appellentur multis nominibus innumerabilibus | atque infinitis, ut medietas, tercia, quarta, nona et decima, et una pars ex XIII., et pars ex .X.VIII., et cetera. Set indi posuerunt exitum partium suarum ex sexaginta: diuiserunt enim unum in .LX. partes, quas nominauerunt minuta. Iterum unum quodque minutum in .LX. partes, quas uocauerunt secunda; eritque unum ex LX. minutum, et unum ex tribus milibus et sexcentis erit secundum; et unum quodque secundum iterum diuiditur in .LX., eritque unum ex ducentis milibus et XVI. milibus tercium; et unum quodque tercium diuiditur in LX. quarta, et ita usque ad infinitum erunt diffe- car. 108 *recto.*

rentie: prima igitur est differentia graduum, in qua est numerus integer, et in secunda mansione erunt minuta. In tercia quoque sunt secunda; et in quarta tercia, et ita usque in .$\widetilde{\text{ix}}$., et .$\widetilde{\text{x}}$. mansione : et scito quod omnis numerus integer qui multiplicatur in numero integro, efficitur numerus integer; et omnis numerus integer multiplicatus in aliqua fractione, efficitur ex genere illius fractionis; eruntque duo gradus multiplicati in duobus minutis .iiii. minuta, et tres gradus in sex terciis .xviii. tercia. Minuta quoque in minutis erunt secunda; et secunda in secundis tercia; et tercia in terciis quarta ; et quarta in quartis quarta : quare coniunctis utrasque differentias quas multiplicas inuicem;et quod colligitur ex numero fractionum simile ei quod exit de numero integro in inuicem multiplicato. Verbi gratia. Sex minuta multiplicata in vii. minuciis, erunt .xlii. secunda: quare minuta sunt partes ex lx. partibus unius integri : et cum multiplicaueris partes ex lx. in .lx., erit quod exierit de multiplicacione ex lx. in lx., que sunt tria milia sexcenta: et similiter .vii. secunda in .ix. minutis erunt .lx. tria tercia ; eruntque omnia quoque lx. ex eis secundum unum, et remanebunt tria tercia : quare minuta sunt partes ex lx., et secunda partes ex tribus milibus et sexcentis. Multiplica ergo ea in inuicem , et efficientur partes ex ducentis milibus et xvi. milibus que sunt tercia , et sunt .lx. ex tribus milibus et sexcentis.

Et cum uolueris multiplicare unum et dimidium in duo et dimidio, fac unum et dimidium minuta, et erunt .xc. Iterum fac unum et dimidium quem uis multiplicare in eadem minuta, et erunt similiter .xc.: multiplica unum ex eis in alio, et erunt .viii. milia et .c. secunda : diuide secunda per lx.;,
car. 108 verso. et erunt minuta: quare omnia queque | lx^ta^ ii^da^. faciunt unum minutum. Exibuntque tibi .c.xxx.^ta^ v^que^ minuta : et diuide ea per lx., et erunt gradus: quare omnia queque .lx.^ta^ minuta faciunt unum gradum;et hoc erit unum integrum ex numero ; exibuntque tibi duo et xvi. minuta, que sunt quarta unius.

Et si nolueris multiplicare duo integra, idest duos gradus et XLV. minuta in tribus integris et X. minutis, ac .XXX. secundis, pone duo integra minuta, idest multiplicabis ea in .LX., et erunt .C.XX., quibus addes predicta .XLV. minuta, et erunt .XLV. minuta: serva ea; quare iam reddidisti ea in ultimam differentiam. Post hec fac predictos tres gradus minuta, multiplicando ea in LX. ut supra. Quibus addes .X. predicta minuta, et erunt .C.XC. minuta: de inde pone ipsa .C.XC. minuta secunda, multiplicando iterum ea in .LX., donec reddas ea in ultimam differentiam, idest in secunda. Erunt .XI. milia quadrigenta, quibus addes .XXX. secunda que sunt cum eis. Eruntque .XI. milia quadringenta secunda. Sicque reddes ea in ultimum genus fractionis eiusdem numeri. Multiplica hec omnia predicta in .C. LXV. minuta, et erunt mille milium, et octingenta octoginta quinque milia ac nongenta quinquaginta tercia: quare multiplicasti ea, idest in secundas in minutiis, et facta sunt tercia. Quod diuides per LX., ut reddantur secunda. Exibuntque tibi .XXXI. milia et quadringenta .XXX.ta II.o secunda, et remanebunt .XXX.ta tercia. Item diuides secunda per .LX., ut reddantur minuta. Exibuntque tibi quingenta .XX. tria minuta, et super erunt LII. secunda. Rursum diuide minuta, ut reddantur gradus, idest numerus integer. Eruntque .VIII.to, et remanebunt .XLtaIIIa. minuta. Eritque omne quod exierit de multiplicacione octo gradus, et XLIII. minuta, et LII. secunda, ac .XXX. tercia: et similiter facies de uniuersis fractionibus; reddes scilicet unamquamque ex eis quam nolueris multiplicare in aliam inferiorem differentiam que fuerit in unaquaque ex eis. Post hec multiplica unam earum in aliam; et serua quod exierit; et uide ex qua differentiarum sit: deinde diuide per .LX. quemadmodum dixi tibi, ut erigas eas ad gradus, uel ergo peruenerint ex differentiis que sunt infra gradus, et quod fuerit, ipsum erit quod exiuit tibi de multiplicacione unius earum in aliam : et est ei alius modus breuior:

set hic ordo est, quo usi sunt indi, super quem figurare numerum suum.

Scito quare cum uolueris diuidere numerum cum fractione per aliquem numerum cum fractione; uel numerum cum fractione per numerum integrum; aut numerum integrum per numerum cum fractione, facies utrumque numerum unius generis, idest uertes utrosque numeros in inferiorem differentiam. Verbi gratia. Si fuerit inferior differentia ex secundis, pones utrumque numerum secunda: quod si fuerint in uno ex eis tercia, et cum alio secunda, uertes utrosque in tercia: et si fuerit cum aliquo ex quarta, uel sexta, uel aliud quod sit his differentiis inferius, alter uero fuerit numerus integer, uertes utrosque in eam differentiam que fuerit in utrisque inferior: deinde diuide quod uolueris super quod uolueris: post quam reddideris utrumque
car. 109 recto. numerum unius generis, et quod exi | erit, erunt gradus, idest numerus integer: quare omnes duo numeri qui fuerint unius generis, si diuidatur unus eorum per alterum, erit quod exierit numerus integer. Verbi gratia : xv. tercie si diuidantur per sex tercias, exibunt de equalitate diuisionis duo et dimidium: quare .xv. tercie faciunt .v. integros; quos cum diuiseris per .vi. tercias qui sunt duo integri, exibunt duo et dimidium : et similiter diuiduntur medietates per medietates, et quarte per quartas , minuta quoque per minuta per minuta, et secunda per secunda, ac tercia per tercia : et cum uolueris diuidere .x. secunda super .v. minuta, pone minuta secunda , ut sint unius generis , atque unius differentie ; eruntque tercenta secunda, super quem dum uolueris diuidere .x. secunda , non possunt diuidi .x. super tercenta. Scito itaque quod non exiuit unus integer: pone ergo circulum in loco unius, et multiplica .x. in .LX. , et erunt sexcenti; quos cum diuiseris super tercentos, exibunt duo, que sunt duo secunda; et hoc est quod debetur uni: quare cum multiplicasti ea in .LX. ; postea diuisisti , iam minuisti ea

una differentia, que sunt secunda: et scito quare omnis numerus qui diuiditur super aliquem numerum, quod extrahitur de diuiso, si multiplicatur in eo super quem diuiditur, redibit numerus primus, idest numerus qui diuiditur. Cuius rei exemplar est : quare cum diuiseris .L. super .x. exibunt que debentur uni, idest quinque. Cumque multiplicaueris id quod exiuit tibi de diuiso, idest quinque, in eo super quem diuidis que suut .x., redibit numerus primus, idest .L. Cum ergo diuideremus .x. secunda super .v. minuta, exiuit quod debetur uni, idest duo secunda: et cum multiplicaremus duo secunda, hoc est quod exiuit nobis ex diuisione, in eo super quod diuisimus que sunt .v. minuta, facta sunt .x. secunda, et hec est probatio diuisionis. Item cum uolueris diuidere .x. minuta super .v. tercia, uerte minuta in tercia, eruntque .xxxvi. milia tercia; diuidesque super .v. tercia, et erunt .vii. milia ducenti gradus, et hoc est quod debetur uni.

Cumque hoc uolueris probare, multiplica .vii. milia ducentos gradus in .v. tercia, et exibunt .xxxvi. milia, que cum diuiseris per .LX., exibunt .vi. centa secunda; et cum iterum diuiseris .vi. centa secunda, exibunt decem minuta.

Cum uolueris constituere numerum integrum et fractiones, pone numerum integrum in altiori differentia : deinde pone quicquid fuerit ex differentia prima que sunt minuta sub numero integro, et secunda sub minutis; et similiter tercia sub secundis , et cetera que uolueris ex differentiis. Cuius rei exemplar est. Quod cum uellemus constituere .xii. gradus et .xxx. minuta, .XL. quoque .vi. secunda, et .L. quarta, constituimus .xii. Post hec posuimus sub eis .xxx. in differentia minutorum ; et sub .xxx. XLV. in differentia secundorum. In differentia uero terciorum posuimus circulos, quare carebat terciis, et ut sciremus quare adhuc restabant quarta. Deinde posuimus sub circulis quinquaginta in differentia quartorum; et hec est figura eorum.

Et similiter uniuersas differentias fractionum sub se inuicem; et quotienscumque collecta fuerint in aliqua mansione .LX., uel plus, ponemus in loco eorum, idest in eorum differentia quicquid residuum fuerit super .LX.; et faciemus de omni .LX. unum.|Ponemus eum in superiora (*sic*) differentia: et similiter si uoluerimus inuenire fractiones, incipiemus a superiori differentia; minuemusque unamquamque differentiam de ea que supra ipsa est. Quod si fuerit in eadem superiori differentia minus eo quod uolueris, minue ex ea : uel fuerit in ea circulus, minue unum de differentia que est super eam; fietque ipsum unum partes .LX. de fractione quam operaris; et minue ex eo quod operaris; et adde quod residuum fuerit super differentiam inperfectam: et si fuerit supra ipsam differentiam circulus, minue de differentia que est supra eam, unum, et redde eum partes .LX. in differentia que est infra ipsam: deinde minue iterum ex ea etiam unum, et fac eum partes ut supra in differentia quam uolueris. Post hec minue ex ea quod uolueris; et quod residuum fuerit pone in ea differentia qua finitum est id quod minuitur ex ea.

car. 109 *verso*.

Et cum duplare aliquem numerum uel fractionem, incipe a differentia altiori: de inde ab ea que eam succedit. Cumque collectum fuerit in aliqua differentiarum aliud plus numero eius partium, pone superfluum in ea differentia, et subleua unum a differentia que est supra ipsam. In mediatione autem incipies ab inferiori differentia, mediabisque illam; deinde sequentem : et si inueneris ibi unum, fac de eo quemadmodum exposui tibi in inicio libri. Et si uolueris multiplicare fractiones et numerum, ac fractiones extra minuta, uel secunda, ut sunt quarte et septime, ac cetere partes his similes, et diuidere eas in inuicem, erit opus in eis sicut opus minutorum et secundorum; et constituam tibi exemplar, si deus uoluerit. Et iam patefeci tibi in multiplicacione minutorum et secundorum ac terciorum de duobus numeris, quos uolueris multiplicare in